0.1 Poisson-Verteilung

Da die einzelnen Reaktionen in allen folgenden Simulationen einer Poisson-Verteilung genügen, werden hier die wichtigsten Eigenschaften dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung wiederholt.

Definition:

Eine Verteilung einer diskreten Zufallsveränderlichen X, bei der die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses (X = x) wie folgt verteilt ist:

$$P_\lambda(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} exp(-\lambda) \quad mit\ \lambda\ \in\ \mathbb{R}_{>0}\ und\ x\ \in\ \mathbb{N}_0 \tag{0.1.1}$$

heißt *Poisson-Verteilung* mit dem Parameter λ.

Diese Verteilung kann als Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereigniss in einem betrachteten Zeitraum T genau x-mal auftritt aufgefasst werden. Die Ereignisrate λ beschreibt dann die mittlere Häufigkeit des Auftretens des Ereignisses in dem Zeitraum T.

Eigenschaften:

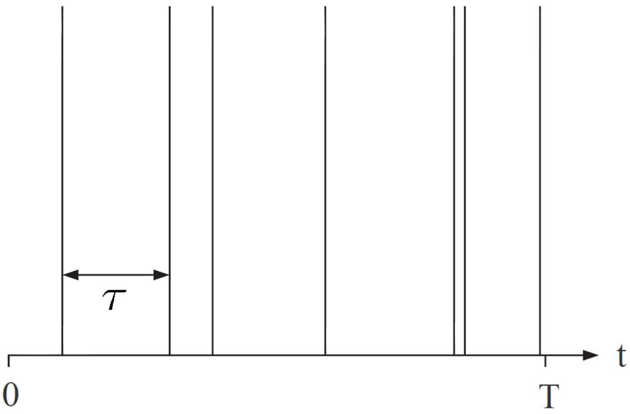
- die Poisson-Verteilung ist durch den Parameter λ (sogenannte „Ereignisrate“) vollständig charakterisiert
- die Poisson-Verteilung ist stationär, d.h. nicht von der Zeit abhängig
- die Poisson-Verteilung P_λ mit Ereignisrate λ hat den Erwartungswert und die Varianz λ
- ein Poisson-Prozess ist stets unkorreliert, d.h. er besitzt ein weisses Leistungsspektrum
- für große λ d.h. für große betrachtete Zeiträume T nähert sich die Poisson-Verteilung immer mehr einer Gaußverteilung um den Mittelwert λ an
- ein Poisson-Prozess ist α-stabil, d.h. die Addition von unabhängigen Poisson-Prozessen liefert wieder einen Poisson-Prozess, wobei sich die mittleren Häufigkeiten addieren:
  $X_{\lambda_1} + ... + X_{\lambda_n} = X_{\lambda_1 + ... \lambda_n}$

Nun soll die Verteilung der Zeit τ zwischen zwei Ereignissen berechnet werden.

Dazu wird nun die Ratenkonstante k_{total} mit variablem betrachtetem Zeitraum τ definiert, so dass die mittlere Häufigkeit des Auftretens des Ereignissses in Zeitraum τ gleich $k_{total} * \tau$ ist. Für $\tau = T$ erhält man wieder die Ereignisrate λ:

$$\lambda = k_{total} * T \tag{0.1.2}$$

Abbildung 1: Zeitdifferenz τ zwischen zwei Ereignissen einer poissonverteilten Zufallsgröße



Bei einer Poissonverteilung ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitintervall $[0, \tau]$ kein Ereignis stattfindet gegeben durch:

$$P_{k_{total}\tau}(X = 0) = \frac{(k_{total}\tau)^0}{0!} exp(-k_{total}\tau) = exp(-k_{total}\tau) \tag{0.1.3}$$

Die Wahrscheinlichkeit für ein (oder mehrere) Ereignis(se) im infinitesimalen Intervall $[\tau, \tau + dt]$ ist:

$$\text{P}_{k_{total}dt}(X \neq 0) = 1 - P_{k_{total}dt}(X = 0) = 1 - exp(-k_{total}dt) \overset{Taylor}{=}$$
$$1 - (1 + (-k_{total}dt)^1 + ...) \approx k_{total}dt \tag{0.1.4}$$

Somit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für ein (oder sogar mehrere Ereignisse) im Zeitintervall $[\tau, \tau + dt]$ und kein Ereignis im Zeitintervall $[0, \tau]$:

$$P_{k_{total}}(\tau)dt := P_{k_{total}dt}(X \neq 0) * P_{k_{total}m\tau}(X = 0) = k_{total} * dt * exp(-k_{total}\tau) \tag{0.1.5}$$

und die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Abstand τ zwischen zwei Ereignissen einer Poissonverteilten Zufallsgröße:

$$P_{k_{total}}(\tau) = k_{total} * exp(-k_{total}\tau) \tag{0.1.6}$$