Ü2.6 Diffusion bei Zufallskräften mit endlicher Korrel. zeit τ_c

Die Diffusion von Test-Teilchen in lebenden Zellen wird angetrieben nicht nur von thermischer Molekularbewegung, sondern auch von ATP-verbrauchenden Motor-Proteinen. Deren Zufallskräfte haben eine endliche Korrel. zeit τ_c.

a) Wie verändert sich das Verschiebungsquadrat mit der Zeit im Falle einer exponentiellen Kraft-Korrelationsfkt. (ansonsten wie Ü2.5, 1D-Betrachtung genügt)?

$$C_{FF}(t_1,t_2) = \langle F^2\rangle e^{-|(t_2-t_1)/\tau_c|}$$

$$v = \frac{1}{\gamma}F \Rightarrow C_{vv}(t_1,t_2) = \frac{1}{\gamma^2}\langle F^2\rangle e^{-|(t_2-t_1)/\tau_c|} = \langle v(t_1)v(t_2)\rangle$$

$$\langle x^2(t)\rangle = \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \,\langle v(t_1)v(t_2)\rangle =$$

$$= \frac{\langle F^2\rangle}{\gamma^2} \int_0^t dt_1 \underbrace{\int_0^t dt_2 \, e^{-|t_2-t_1|/\tau_c}}_{= \underbrace{\int_0^{t_1} \ldots dt_2}_{A} + \underbrace{\int_{t_1}^{t} \ldots dt_2}_{B}}$$

$t_2 \le t_1$

$$A = \int_0^{t_1} dt_2\, e^{(-t_1+t_2)/\tau_c} = e^{-t_1/\tau_c} \underbrace{\int_0^{t_1} e^{t_2/\tau_c}\, dt_2}_{\tau_c \left[e^{t_2/\tau_c}\right]_0^{t_1} = \tau_c\left(e^{t_1/\tau_c} - 1\right)}$$

$$A = \tau_c\left(1 - e^{-t_1/\tau_c}\right)$$

$t_2 \ge t_1$

$$B = \int_{t_1}^{t} dt_2\, e^{(-t_2+t_1)/\tau_c} = e^{+t_1/\tau_c} \underbrace{\int_{t_1}^{t} e^{-t_2/\tau_c}\, dt_2}_{-\tau_c\left[e^{-t_2/\tau_c}\right]_{t_1}^{t} = -\tau_c\left[e^{-t/\tau_c} - e^{-t_1/\tau_c}\right]}$$

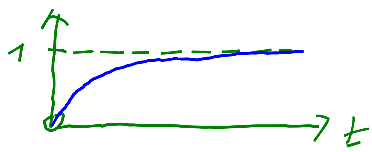
$$B = \tau_c\left(1 - e^{(t_1-t)/\tau_c}\right)$$

$$A + B = \tau_c\left[2 - e^{-t_1/\tau_c} - e^{+t_1/\tau_c} e^{-t/\tau_c}\right]$$

$$\int_0^t (A+B)\, dt_1 = 2\tau_c \int_0^t dt_1 - \tau_c \underbrace{\int_0^t e^{-t_1/\tau_c}\, dt_1}_{-\tau_c\left[e^{-t_1/\tau_c}\right]_0^t = -\tau_c\left(e^{-t/\tau_c} - 1\right)} - \tau_c e^{-t/\tau_c} \underbrace{\int_0^t e^{+t_1/\tau_c}\, dt_1}_{\tau_c\left[e^{t_1/\tau_c}\right]_0^t = \tau_c\left(e^{t/\tau_c} - 1\right)}$$

$$= 2\tau_c t + \tau_c^2\left(e^{-t/\tau_c} - 1\right) \underbrace{- \tau_c^2 \underbrace{e^{-t/\tau_c}\left(e^{t/\tau_c} - 1\right)}_{\left(1 - e^{-t/\tau_c}\right)}}_{+\tau_c^2\left(e^{-t/\tau_c} - 1\right)}$$

$$= 2\tau_c t - 2\tau_c^2 \underbrace{\left(1 - e^{-t/\tau_c}\right)}_{\text{wie Kondensator-Ladekurve}}$$



Somit: $\boxed{\langle x^2(t)\rangle = \frac{\langle F^2\rangle}{\gamma^2}\left[2\tau_c t - 2\tau_c^2\left(1-e^{-t/\tau_c}\right)\right]}$

b) Skizzieren und interpretieren Sie das Resultat (Grenzfälle kleine und große Zeiten).

$$t \ll \tau_c \Rightarrow e^{-t/\tau_c} \approx 1 - \frac{t}{\tau_c} + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau_c}\right)^2 \Rightarrow \left(1-e^{-t/\tau_c}\right) \approx \frac{t}{\tau_c} - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau_c}\right)^2$$

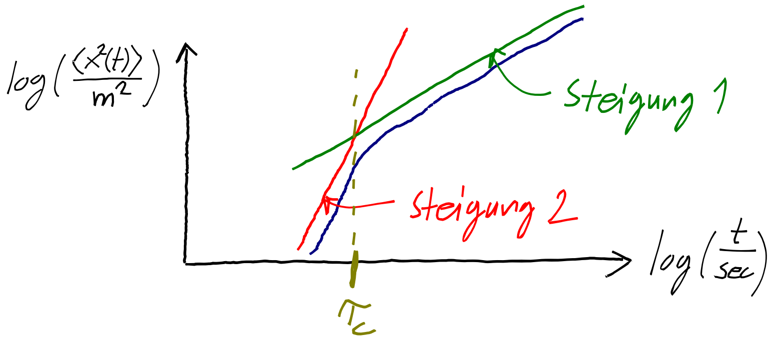
$$\Rightarrow \langle x^2(t)\rangle = \frac{\langle F^2\rangle}{\gamma^2}\left[2\tau_c t - 2\tau_c t + t^2\right] = \frac{\langle F^2\rangle}{\gamma^2} t^2$$

Für kurze Zeit Motor-kräfte fast konstant $\Rightarrow$
Im überdämpften Fall ballistische Bewegung ($v = \text{const.}$) $\Rightarrow$
$x(t) \propto t \Rightarrow x^2(t) \propto t^2$

$$t \gg \tau_c \Rightarrow \left(1-e^{-t/\tau_c}\right) \approx 1$$

$$\Rightarrow \langle x^2(t)\rangle = \frac{\langle F^2\rangle}{\gamma^2}\left(2\tau_c t - 2\tau_c^2\right) \longrightarrow 2\left[\frac{\tau_c\langle F^2\rangle}{\gamma^2}\right] t$$

Auf langen Zeitskalen keine Korrelationen mehr $\Rightarrow$
Normale Brownsche Bewegung $\Rightarrow$ $x^2(t) \propto t$



Effektive Diffusions-konstante D